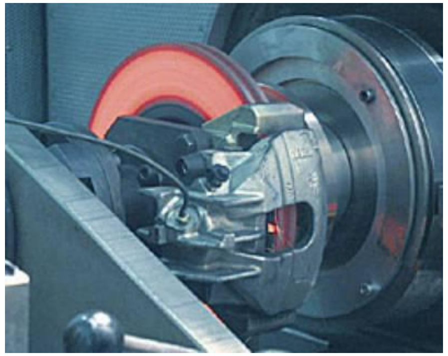
Energétique







Energétique

Compétences attendues :

- ✓ Proposer une démarche permettant la détermination d’une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- ✓ Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
- ✓ Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

Energie cinétique

Définition

$$Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\int_S \left[\overrightarrow{V(M \in S/Rg)}\right]^2 dm\,(M)$$

<u>Unité :</u> le Joule (J)

Energie cinétique

Cas du solide indéformable

$$2E_C(S/R_g) = \int_S [\overrightarrow{V(G \in S/R_g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}]^2 \, dm$$

$$= \int_S [\overrightarrow{V\left(G \in S/R_g\right)}]^2 \, dm + \int_S [\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}]^2 \, dm + 2\int_S \overrightarrow{V\left(G \in S/R_g\right)} . [\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}] \, dm \;\; *$$

* produit mixte: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ = $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$= déterminant des 3 vecteurs donc invariant par permutation circulaire.

Donc $\left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right]^2 = \left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right].\left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right] = \vec{\Omega}.\overrightarrow{GM} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}]$

Energie cinétique

Cas du solide indéformable

$$2.\ \mathrm{E_c}(S/R_g) = m[\overrightarrow{V(G\in S/R_g)}]^2 + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\int_S\left[\overrightarrow{GM}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\wedge\overrightarrow{GM}\right]dm + 2\overrightarrow{V(G\in S/R_g)}.\left[\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}\wedge\cancel{\int_S\overrightarrow{GM}\,dm}\right]$$

D'où $\boldsymbol{Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\,m\left[\overrightarrow{V(G\in S/Rg)}\right]^2 + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}.[I_G(S)]\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$

<u>Attention :</u> Cette formule n'est vrai qu'en G !!

Energie cinétique

Cas du solide indéformable

Cas particuliers:

- Mouvement d'un solide S autour d'un point fixe A de R_g :

$$Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}.[I_A(S)]\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$$

à partir des équations précédentes, en passant par A au lieu de G

Energie cinétique

Cas du solide indéformable

Cas particuliers:

- Mouvement d'un solide S autour d'un axe fixe (A,$\vec{x}$) de R_g :

on peut poser $\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \omega\vec{x}$ d'où

$$Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\,[I_{A_x}(S)]\omega^2$$

Energie cinétique

Cas du solide indéformable

Remarque : Energie cinétique d'un ensemble ∑ de n solides S_j :

$$Ec(\Sigma/Rg) = \sum_{j=1}^{n} Ec_j\,(S_j/R_g)$$

Expression générale :

$$\boldsymbol{Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\{C(S/R_g)\}_Q \otimes \{V(S/R_g)\}_Q}$$

Energie cinétique

Cas du solide indéformable

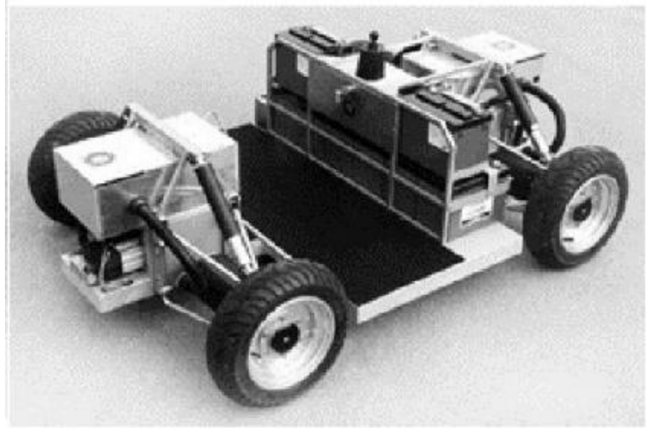
Remarques :

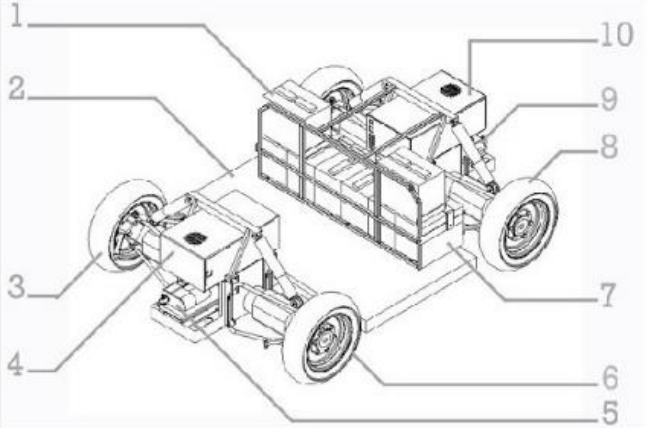
- $E_c \geq 0$.
- E_c indépendante du point.
- Torseurs → écrits au même point avant multiplication (point → calculs simples).
- **Calculer uniquement les composantes utiles du moment cinétique et de la matrice d'inertie**.

Energie cinétique

Inertie équivalente

Véhicule RobuCar

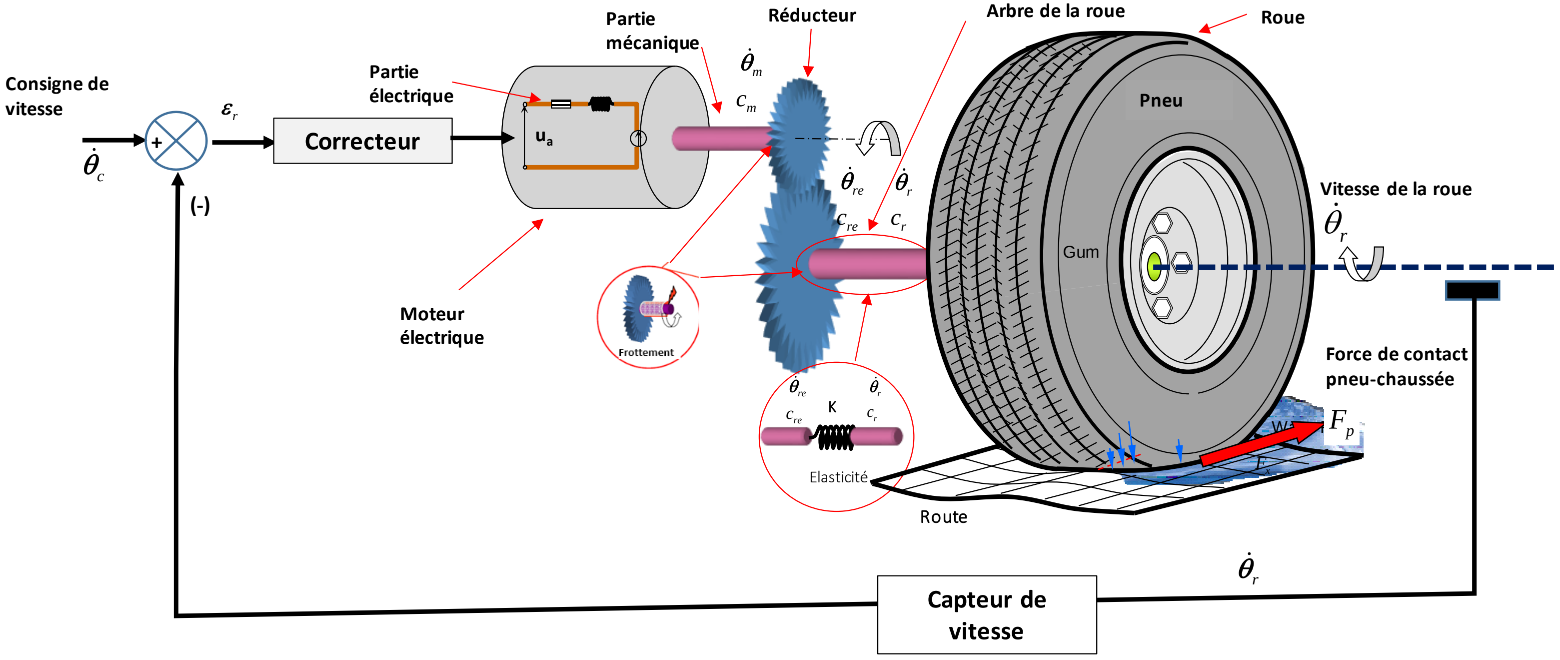




1 – Batteries 12 Volts 60 Ah
2 – Châssis nid d'abeille
3 – Roue avant droite
4 – Armoire de contrôle avant
5 – Bloc de direction électrique avant
6 – Roue avant gauche
7 – Batteries
8 – Roue arrière gauche
9 – Bloc de direction électrique arrière
10 – Armoire de contrôle arrière

Energie cinétique

Inertie équivalente



Moteur :

Moment d'inertie de l'arbre moteur :
J_{mot} = 0,0095 kg.m².
Masse du moteur : M_{Mot} = 0,350 kg.

Réducteur :

Moment d'inertie de l'arbre du réducteur :
J_{Red} = 3,2 kg.m².
Rapport de réduction : N = 13.
Masse du réducteur : M_{Red} = 0,125 kg.

Roue :

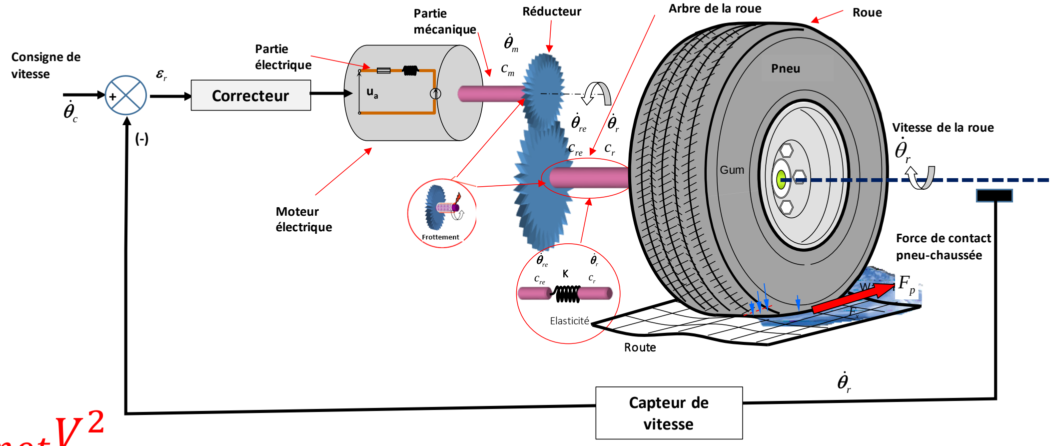
Moment d'inertie de l'arbre du réducteur :
J_{Roue} = 0,004 kg.m².
Rayon : R = 0,20 m.
Masse de la roue : M_{roue} = 0,2 kg.

Véhicule :

Vitesse de translation : V

Energie cinétique

Inertie équivalente



$$Ec(Mot) = \frac{1}{2} J_{mot}\omega_{mot}^2 + \frac{1}{2} M_{mot}V^2$$

$$Ec(Red) = \frac{1}{2} J_{Red}\omega_{Red}^2 + \frac{1}{2} M_{Red}V^2$$

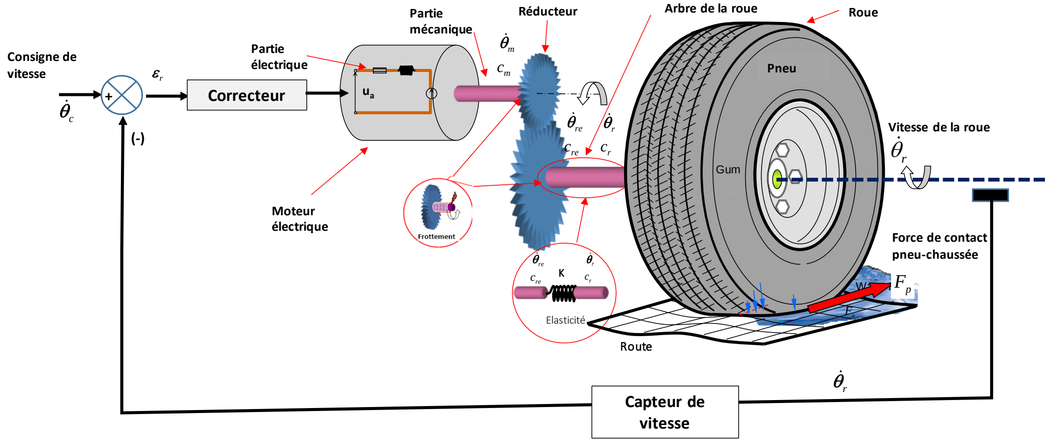
$$Ec(Roue) = \frac{1}{2} J_{Roue}\omega_{Roue}^2 + \frac{1}{2} M_{roue}V^2$$

$$Ec(Tot) = E_c(Mot) + E_c(Red) + E_c(Roue)$$

$$Ec(Tot) = \frac{1}{2} J_{mot}{\omega_{mot}}^2 + \frac{1}{2} J_{Red}{\omega_{Red}}^2 + \frac{1}{2} J_{Roue}\omega_{Roue}^2 + \frac{1}{2}(M_{mot} + M_{Red} + M_{roue}).V^2$$

Energie cinétique

Inertie équivalente



Or $N = \dfrac{\omega_{mot}}{\omega_{Red}}$ et $V = \omega_{Roue}.R = \omega_{Red}.R$

D'où $Ec(Tot) = \frac{1}{2}J_{mot}\omega_{mot}{}^2 + \frac{1}{2}J_{Red}\frac{\omega_{mot}{}^2}{N^2} + \frac{1}{2}J_{roue}.\omega_{mot}{}^2.\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2}(M_{mot} + M_{Red} + M_{roue}).\omega_{mot}{}^2.\frac{R^2}{N^2}$

Donc $Ec(Tot) = \frac{1}{2}\omega_{mot}{}^2\left[J_{mot} + \frac{J_{Red}}{N^2} + \frac{J_{roue}}{N^2} + (M_{mot} + M_{Red} + M_{roue})\frac{R^2}{N^2}\right] = \frac{1}{2}\omega_{mot}{}^2 J_{eq}$

Finalement $J_{eq} = J_{mot} + \frac{J_{Red}}{N^2} + \frac{J_{roue}}{N^2} + (M_{mot} + M_{Red} + M_{roue})\frac{R^2}{N^2}$ A.N. : $J_{eq} = 0{,}0286\ kg.m^2$

Puissance

Puissance des efforts extérieurs à un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R_g

$\overrightarrow{dF(M)}$: champ de forces agissant en chaque point M d'un système Σ.

Exemples :

- *Pesanteur :* $\overrightarrow{dF}(M) = \rho\, \overrightarrow{g(M)}\, dv$
- *Champ de pression dans un fluide :* $\overrightarrow{dF(M)} = -p(M)\, \overrightarrow{n(M)}\, ds$
- *Champ des forces de contact entre 2 solides :* $\overrightarrow{dF(M)} = -p(M)\, \overrightarrow{n(M)}\, ds + f\, p(M)\, \overrightarrow{t(M)}\, ds$

La puissance développée, à l'instant t, par l'action des efforts extérieurs sur Σ, dans le mouvement de Σ/R_g est :

$$\boldsymbol{P(Ext \rightarrow \Sigma/R_g) = \int_{M\in\Sigma} \overrightarrow{V(M \in \Sigma/R_g)}.\overrightarrow{dF(M)}}$$

Unité : Le Watt et 1kW = 1,36 ch

Puissance

Puissance des efforts extérieurs à un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R_g

Remarque : Travail fournit par [Ext→ Σ] entre les instants t_0 et t_1 :

$$W_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$$

Unité : Le Joule et 1 kW.h = 3600.10 ^{3} J

Puissance

Cas particulier du solide indéformable

On a $\overrightarrow{V(M \in S/Rg)} = \overrightarrow{V(A \in S/Rg)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}$

d'où $P(Ext \to S/R_g) = \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)}.\overrightarrow{V\big(A \in S/Rg\big)} + \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)}.[\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}]$

$= \overrightarrow{V\big(A \in S/Rg\big)} . \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}. \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF(M)}$

Torseur associé aux efforts extérieurs à S en A :

$$\left\{ \begin{matrix} \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{R(Ext \to S)} \\ \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{M_A(Ext \to S)} \end{matrix} \right\}$$

donc $P(Ext \to S/R_g) = \overrightarrow{V\big(A \in S/Rg\big)}.\overrightarrow{R(Ext \to S)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}.\overrightarrow{M_A(Ext \to S)}$

Puissance

Cas particulier du solide indéformable

$$\boldsymbol{P(Ext \rightarrow S/R_g) = \{\tau(Ext \rightarrow S)\}_A \otimes \{V(S/Rg)\}_A}$$

Le comoment ne dépend pas du point choisi pour le calcul des deux torseurs (même point pour les deux !) mais du repère R.

Puissance

Cas particulier du solide indéformable

Rappel : Le comoment de deux torseurs :

$$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_A = X.V_x + Y.V_y + Z.V_z + L.\omega_x + M.\omega_y + N.\omega_z$$

Le comoment ne dépend pas du point choisi pour le calcul des deux torseurs (même point pour les deux !) mais du repère R.

Puissance

Puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables

On parle aussi de la puissance des inter-efforts de liaison.

S_1 et S_2 en liaison à l'intérieur d'un système :

$$\begin{aligned} P(S_2 \cup S_1 / R_g) &= P(S_2 \rightarrow S_1 / R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_g) \\ &= \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes \{V(S_1/R_g)\} + \{\tau(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{V(S_2/R_g)\} \\ &= \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes [\{V(S_1/R_g)\} - \{V(S_2/R_g)\}] \end{aligned}$$

D'où

$$\boldsymbol{P_i(S_1, S_2) = \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes \{V(S_1/S_2)\}}$$

Puissance des efforts intérieurs → indépendante du repère R_g.

Puissance

Liaisons parfaites entre deux solides

S_1 et S_2 → liaison parfaite = puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle (pas de frottement) :

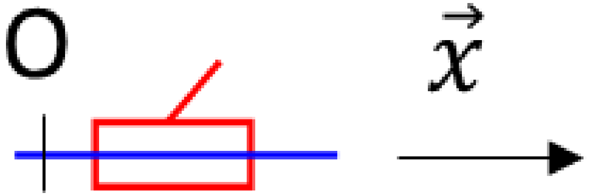
$$\boldsymbol{P_i(S_1, S_2) = 0}$$

Puissance

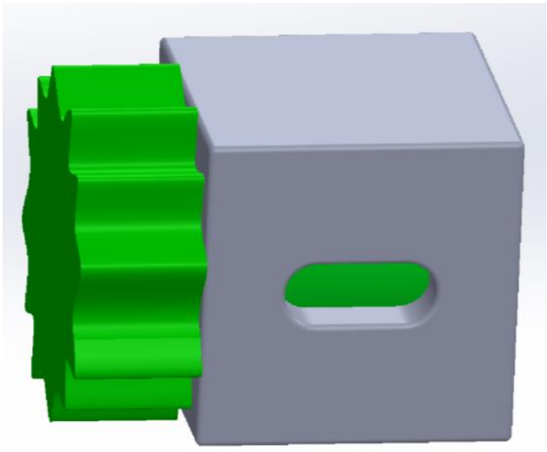
Liaisons parfaites entre deux solides

Application : Retrouver les torseurs des actions mécaniques pour les liaisons normalisées suivantes :

- Pivot glissant d'axe $\vec{x}$



$$\{V(S_1/S_2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \qquad \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$



$$P_i(S_1, S_2) = 0 \rightarrow L.\omega_x + X.V_x = 0 \quad \forall\, \omega_x \; et \; \forall\, V_x \rightarrow X = L = 0$$

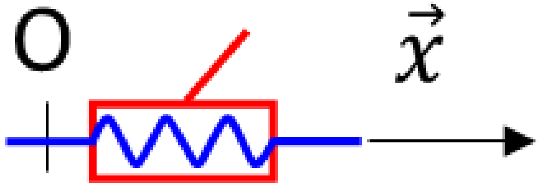
D'où $\{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$

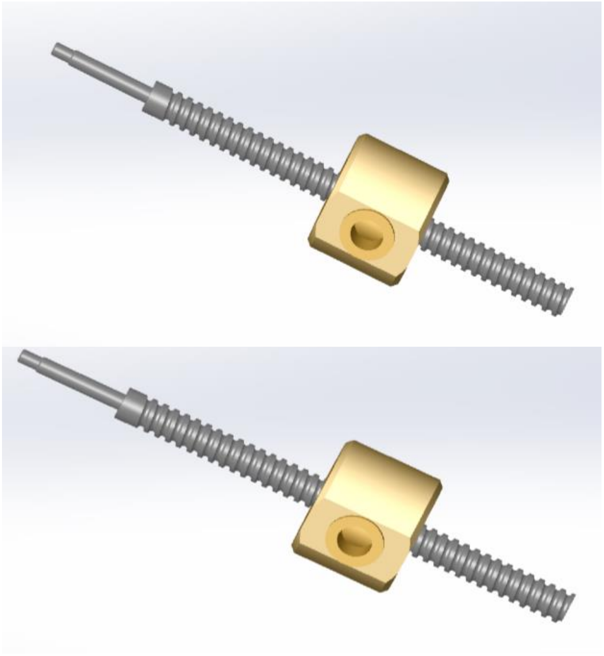
Puissance

Liaisons parfaites entre deux solides

Application : Retrouver les torseurs des actions mécaniques pour les liaisons normalisées suivantes :

- Hélicoïdale d'axe $\vec{x}$





$$\{V(S_1/S_2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & \frac{p\omega_x}{2\pi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \qquad \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

$$P_i(S_1, S_2) = 0 \rightarrow L.\omega_x + X.\frac{p\omega_x}{2\pi} = 0 \quad \forall\, \omega_x \ \rightarrow L = -X\frac{p}{2\pi}$$

D'où $\{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & -X\frac{p}{2\pi} \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$

Puissance

Liaisons parfaites entre deux solides

Remarque générale : La puissance → grandeur scalaire donc **signée**.

Exemples :

- Puissance « motrice » : $P_{mot} = \overrightarrow{C_{mot \to arbre}} . \overrightarrow{\Omega_{arbre/0}} > 0.$

  Vitesse de rotation + Couple → même sens

- Puissance dans une liaison glissière 1/0 avec frottement : $P_{0 \to 1} = \overrightarrow{T_{0/1}} . \overrightarrow{V_M(1/0)} < 0$.

  Effort tangentiel → Opposé à la vitesse de glissement (Coulomb)

- Puissance dissipée (embrayage ou frein) : $P_{0 \to 1} = \overrightarrow{C_{f\,0/1}} . \overrightarrow{\Omega_{1/0}} < 0.$

Théorème de l'énergie cinétique

Solide unique S en mouvement / R_g

<u>PFD :</u> $\{D(S/R_g)\} = \{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}$

Multiplication par Torseur cinématique :

$$\{D(S/R_g)\}\otimes\{V(S/R_g)\} = \{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}\otimes\{V(S/R_g)\} = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

Or $\{D(S/R_g)\}\otimes\{V(S/R_g)\} = \left[\int_S \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}\, dm\right].\overrightarrow{V(A \in S/R_g)} + \left[\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}\, dm\right].\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$

$$= \int_S \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}.[\overrightarrow{V(A \in S/R_g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}]dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}.[\overrightarrow{V(M \in S/R_g)}]dm = \int_S \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(M \in S/R_g)}^2 dm$$

$$= \frac{d}{dt}E_c(S/R_g)$$

Théorème de l'énergie cinétique

Solide unique S en mouvement / R_g

La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S.

$$P(Ext \to S/R_g) = \frac{d}{dt} E_c(S/R_g)$$

Théorème de l'énergie cinétique

Système Σ de n solides S_j

<u>1 solide :</u>

$$P(Ext \rightarrow S_j/R_g) = \frac{d}{dt}E_c(S_j/R_g)$$

<u>n solides :</u>

$$\sum P(Ext \rightarrow S_j/R_g) = \sum \frac{d}{dt}E_c(S_j/R_g)$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(Ext \rightarrow \Sigma) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} P_i(S_j, S_k) = \frac{d}{dt}E_c(\Sigma/R_g)}}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Système Σ de n solides S_i

<u>Remarques :</u>

- Théorème E_c → 1 équation.
- PFD → 6 équations ≈ *Théorème E_c si 1 degré de mobilité.*
- Système de solides → prendre en compte les inter-efforts (≠ PFD).
- Théorème E_c → utile → Liaisons parfaites et/ou puissance "dérive d'un potentiel".
- **Théorème E_c → Présence de plusieurs actionneurs à l'intérieur du système isolé.**

Théorème de l’énergie cinétique

Système Σ de n solides S_i

Remarques :

- Théorème E_c → **Bilan très soigneux des actions intérieures et extérieures**
  *(Graphe des liaisons + toutes les actions, poids et **actionneurs compris**).*

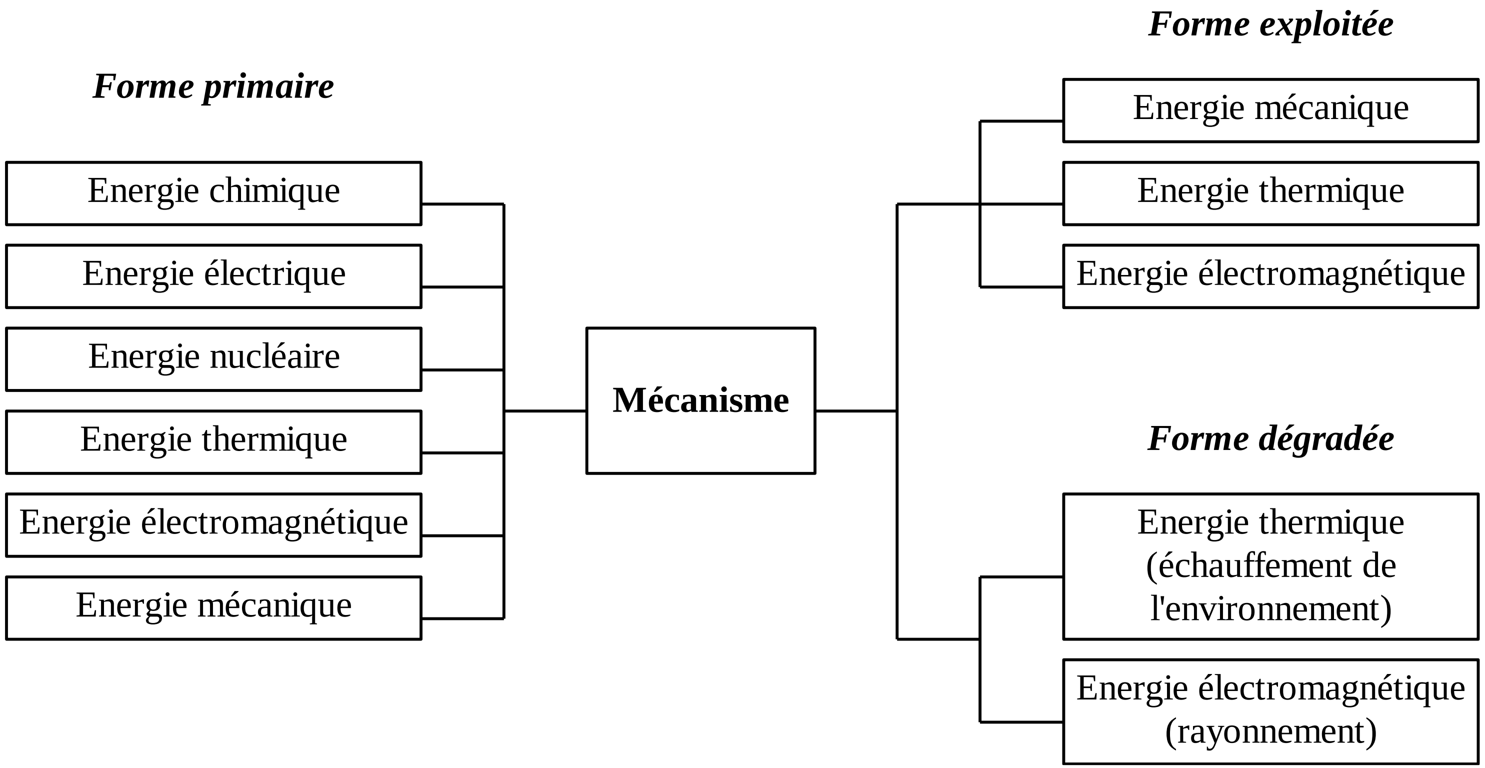
- **Théorème E_c → DETERMINATION DE L’EQUATION DU MOUVEMENT.**

- PFD → plus long (isolements successifs + équations sur les axes des mouvements).

Rendement

Définitions

Un mécanisme transforme une énergie sous forme primaire en énergie sous forme exploitée. Cette transformation entraîne une dissipation de l'énergie sous forme dégradée.



Rendement

Définitions

$$\eta(t) = \frac{|P_{réceptrice}|}{P_{motrice}} \qquad 0 < \eta(t) < 1$$

- $P_{motrice}$ = P_m = puissance reçue par le système $\quad P_m \geq 0$

  (moteurs)

- $P_{dissipée}$ = P_d = puissance perdue sous forme de chaleur $\quad P_d \leq 0$

  (frottement dans les liaisons)

- $P_{réceptrice}$ = P_r = puissance donnée par le système sous une forme autre que la chaleur $\quad P_r \leq 0$

  ("frein-moteur")

Rendement

Calculs du rendement d'un ensemble Σ de solides en mouvement / R_g

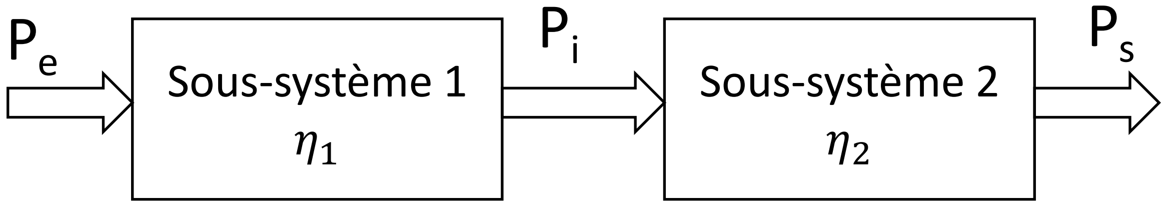
Remarques :

- Rendement → dépend en général du temps → calcul du rendement moyen pour les mouvements cycliques.

- Si toute la puissance est dissipée sous forme de chaleur → Rendement = 0 (frein).

Rendement

Calculs du rendement d'un ensemble Σ de solides en mouvement / R_g



$$\eta_{global} = \frac{P_s}{P_e} = \frac{P_i}{P_e} . \frac{P_s}{P_i} = \eta_1 . \eta_2$$

$$\boldsymbol{\eta_{global} = \frac{P_s}{P_e} = \prod_i \eta_i}$$